par Charles Delaporte

Les richesses cachées de la table de Pythagore

Vous pensiez connaître les tables de multiplication ? Détrompez-vous ! Une surprenante propriété apparaît lorsque l'on trace un polygone régulier sur la table de Pythagore : la moyenne des valeurs des sommets correspond à la valeur centrale du polygone !

Ptolémée enseignant à un jeune garçon devant la reproduction d'une table de Pythagore (stèle funéraire du géomètre Ptolémée, début du IIIe siècle avant notre ère ; marbre blanc ; hauteur 77 cm).

L'origine de la célèbre table de Pythagore se perd dans l'Antiquité grecque. La plus ancienne représentation connue, sous forme de tableau 10 × 10, se trouve sur la stèle funéraire d'un certain géomètre nommé Ptolémée (il ne s'agit pas du célèbre astronome du IIe siècle), au début du IIIe siècle avant notre ère.
Quelques décennies auparavant, dans ses *Topiques*, Aristote encourageait l'apprentissage par cœur des tables de 1 à 10, qu'il considérait comme un socle fondamental indispensable à connaître pour pouvoir effectuer par la suite des calculs plus élaborés. C'est la plus ancienne mention connue des tables de multiplication.
Avec l'immuabilité qui caractérise les objets mathématiques, ce fameux tableau de nombres est parvenu tel quel jusqu'à nous et son apprentissage systématique (parfois douloureux !) continue encore aujourd'hui à forger l'esprit de nos écoliers, en dépit de l'avènement des calculatrices.

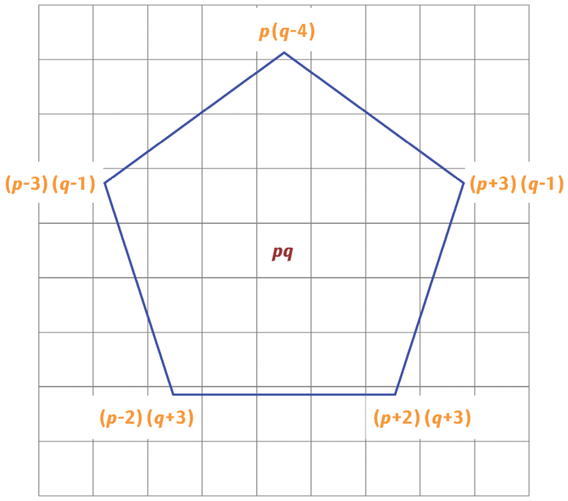
+ L'essentiel est invisible pour les yeux

Mais la table de Pythagore est davantage qu'un simple outil de calcul. Lorsqu'on l'étudie pour elle-même, en tant qu'objet mathématique, on y découvre des richesses insoupçonnées. On a beau avoir eu mille fois sous les yeux les tables de multiplication et les avoir apprises par cœur, d'étonnantes propriétés se dissimulent à notre regard. Ainsi, par exemple, chaque nombre situé à l'intérieur de la table de Pythagore est égal à la moyenne des huit nombres qui l'entourent. L'aviez-vous remarqué ? En effet, le nombre qui se trouve à la ligne q et à la colonne p de la table de Pythagore est évidemment le produit qp ; les huit nombres qui l'entourent sont $(q-1)(p-1)$, $(q-1)p$, $(q-1)(p+1)$, $q(p-1)$, $q(p+1)$, $(q+1)(p-1)$, $(q+1)p$ et $(q+1)(p+1)$. La somme de ces entiers vaut $8qp$; le résultat en découle.

Plus étonnant encore :
Lorsque l'on trace un polygone régulier sur la table de Pythagore, la moyenne des valeurs des sommets est au centre du polygone.
Pour illustrer cette propriété, commençons par observer deux exemples concrets : un pentagone régulier et un hexagone régulier. Sur la figure ci-dessous, la situation est localisée précisément sur les tables de multiplication. Sur la figure suivante, le même polygone régulier est déplacé de façon générique à l'intérieur des tables, en plaçant le centre de gravité du polygone à l'intersection de la p-ième colonne et de la q-ième ligne.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Cas du pentagone régulier : la moyenne des sommets se trouve au centre. On a ici 5 + 32 + 56 + 24 + 8 = 5 × 25.

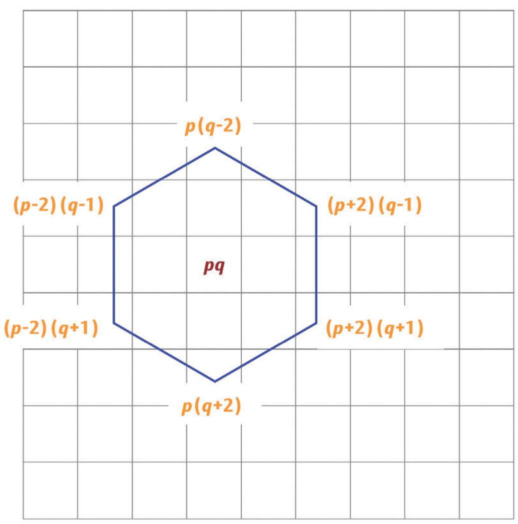


On a effectivement

$$\frac{p(q-4)+(p+3)(q-1)+(p+2)(q+3)+(p-2)(q+3)+(p-3)(q-1)}{5}=pq.$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Cas de l'hexagone régulier : la moyenne des sommets se trouve au centre. On a ici 12 + 24 + 36 + 28 + 12 + 8 = 6 × 20.



On a effectivement

$$\frac{p(q-2)+(p+2)(q-1)+(p+2)(q+1)+p(q+2)+(p-2)(q+1)+(p-2)(q-1)}{6}=pq.$$

Du discret au continu

La symétrie des polygones réguliers semble s'exprimer dans nos tables de multiplication. Pour le prouver en toute généralité, il est nécessaire de remplacer la table de Pythagore (discrète) par le plan complexe (continu). On associe à chaque point M de coordonnées (p, q), donc d'affixe $z = p + iq$, le nombre réel $f(z) = pq = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(z^2\right)$. On obtient ainsi une « table de Pythagore continue » !

Si l'on note maintenant $z_1, z_2\dots z_n$ les affixes des sommets d'un polygone régulier à n côtés (avec $n \geq 3$) et ω l'affixe du centre Ω de ce polygone, on doit montrer que $\frac{f(z_1)+f(z_2)+\ldots+f(z_n)}{n} = f(\omega)$, ce qui signifie précisément que la moyenne des valeurs associées aux sommets est au centre du polygone.

Pour prouver l'égalité précédente, on se souvient que, par définition, les sommets d'affixes $z_1, z_2\dots z_n$ s'obtiennent en itérant la rotation d'angle $2\pi/n$ et de centre Ω à partir d'un sommet quelconque du polygone régulier. Dit autrement (avec le langage de l'analyse complexe), pour tout k compris entre 1 et n, $z_k = \omega + \mathrm{R}e^{i\theta} \times (\exp 2i\pi/n)^k = \omega + \mathrm{R}e^{i\theta} \times \exp(2ik\pi/n)$ avec R le rayon du cercle circonscrit au polygone (donc la distance de Ω à l'un quelconque des sommets du polygone) et θ l'argument de $z_n - \omega$.

On a déjà, en posant $\alpha = \exp 2i\pi/n$ (en particulier, remarquez que $\alpha^n = \exp(2in\pi/n) = \exp(2i\pi) = 1$) :

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\omega + \mathrm{R}e^{i\theta}\alpha^k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\omega^2 + \mathrm{R}^2 e^{2i\theta}\alpha^{2k} + 2\omega \mathrm{R}e^{i\theta}\alpha^k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\omega^2 + \mathrm{R}^2 e^{2i\theta}\sum_{k=1}^{n}\alpha^{2k} + 2\omega\mathrm{R}e^{i\theta}\sum_{k=1}^{n}\alpha^k.$$

Intéressons-nous au dernier terme et posons

$$\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{n}\alpha^k = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^n$$

(progression géométrique de raison α).

On a alors $\alpha\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{n}\alpha^{k+1} = \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^n + \alpha^{n+1}$.

Mais $\alpha^{n+1} = \alpha\times\alpha^n = \alpha\times 1 = \alpha = \alpha^1$. On en déduit que $\alpha\mathrm{S}$ est rigoureusement égale à S. Comme α est différent de 1 (puisque n est supérieur à 3), on a nécessairement $\mathrm{S} = 0$; on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = \sum_{k=1}^{n}\omega^2 + \mathrm{R}^2 e^{2i\theta}\sum_{k=1}^{n}\alpha^{2k}.$$

Posons de même $\mathrm{T} = \sum_{k=1}^{n}\alpha^{2k}$. Comme $n \geq 3$, on a $\alpha^2 \neq 1$.

On calcule alors directement la valeur de T comme somme des termes d'une progression géométrique de raison α^2 :

$$\mathrm{T} = \sum_{k=1}^{n}\alpha^{2k} = \alpha^2\frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\left(1-(\alpha^n)^2\right) = 0 \text{ car } \alpha^n = 1.$$

Il vient que $\sum_{k=1}^{n} z_k^2 = \sum_{k=1}^{n}\omega^2 = n\omega^2$, et donc que $\omega^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k^2$.

On en conclut que

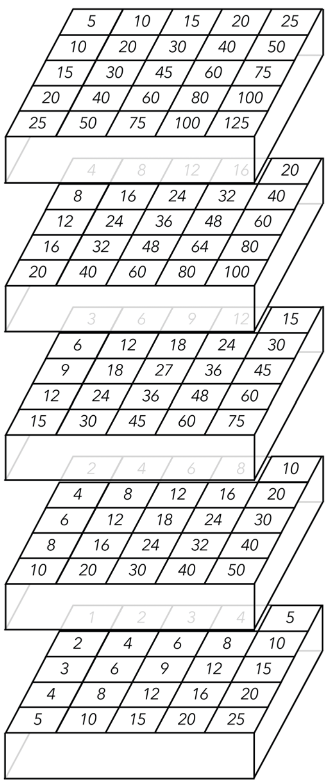
$$f(\omega) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\omega^2\right) = \frac{1}{n}\times\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\times\mathrm{Im}\left(z_k^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k).$$

Le résultat est établi.

Intrigant, n'est-ce pas ? En observant comment la symétrie de ces deux polygones s'exprime numériquement dans les tables de multiplication, on pressent que cette remarquable propriété pourrait aisément se généraliser à tous les cas de figure ! En plaçant n'importe quel polygone régulier, de n'importe quelle taille, dans n'importe quelle position, sur les tables de multiplication, la moyenne des valeurs des sommets devrait ainsi toujours se trouver au centre… et c'est bien le cas (voir une démonstration en encadré page précédente).

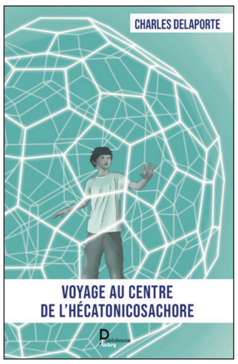
+ Généralisation en trois dimensions

De façon surprenante, la propriété se généralise en trois dimensions. Il faut pour cela considérer une « table de Pythagore tridimensionnelle », obtenue en « empilant » nos tables de multiplication : on imagine un cube $n \times n \times n$ constitué de cellules formant un empilement de n tables de Pythagore. Sur l'illustration ci-dessous, $n = 5$.



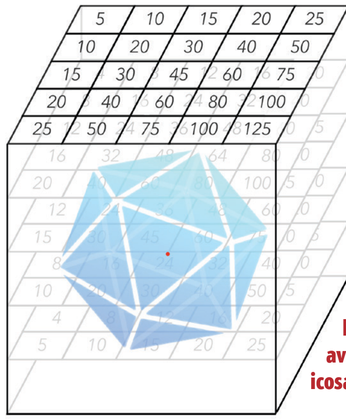
La construction en trois dimensions. Par exemple, le « 40 » qui se trouve en haut à droite est obtenu comme le produit de la ligne 2 par la colonne 4 et par la pile 5 (2 × 4 × 5 = 40).

Avec cette construction tridimensionnelle, vous pouvez vérifier que le nombre figurant dans une cellule est la moyenne des nombres figurant dans les vingt-six cellules adjacentes.



Toutes ces propriétés de la table de Pythagore, et bien d'autres encore, sont à retrouver dans le livre *Voyage au centre de l'hécatonicosachore*, Publishroom Factory, 2022 (voir la note de lecture parue dans *Tangente Éducation* 64 (2023) et disponible sur **tangente-mag.com**).

On remplace maintenant les polygones réguliers par des polyèdres réguliers (les célèbres solides de Platon). En plaçant un tel solide dans une « table de Pythagore continue tridimensionnelle » (comme on a fait pour le plan, en identifiant cette fois le point M de coordonnées (x, y, z) au produit xyz), on constate, non sans émerveillement, que la propriété de moyenne reste encore valable, excepté pour le tétraèdre. Pour les quatre autres solides (le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre), la moyenne des sommets est bien toujours au centre. La démonstration, calculatoire, se fait en examinant un par un le cas de chaque polyèdre, en considérant les coordonnées de ses sommets (voir l'article *Propriétés de moyenne dans la table de Pythagore* cité en référence).



Exemple avec un icosaèdre.

+ Au-delà : à vous de jouer !

Plusieurs pistes de généralisations viennent naturellement à l'esprit, dont certaines s'avèrent fructueuses.

Si l'on augmente la dimension de l'espace, le charme est rompu : la propriété n'est plus vérifiée pour les polytopes réguliers de dimension 4 ou plus. En revanche, elle reste vraie en dimension 3 pour les solides archimédiens (excepté pour le tétraèdre tronqué), « moins réguliers » que les solides de Platon mais encore « suffisamment riches » en symétries internes.

On peut aussi imaginer d'autres tableaux de nombres que la table de Pythagore (autrement dit, d'autres fonctions complexes), et se demander lesquels vérifient la propriété. Avis aux amateurs : il y a là vraisemblablement un domaine à explorer. À vos stylos !

C.D.

RÉFÉRENCES

- *Propriétés de moyenne dans la table de Pythagore*. Charles Delaporte, 2022, disponible en ligne sur HAL.
- Dossier « Les secrets du calcul mental ». *Tangente* 163, 2015.
- Dossier « La saga des théorèmes : Pythagore ». *Tangente* 172, 2016.
- Dossier « Les triplets pythagoriciens ». *Tangente* 212, 2023.
- *Les nombres complexes*. Bibliothèque Tangente 63,
- Dossier « Le barycentre ». *Tangente* 201, 2021.